Q1) Un point $\mathrm{M}(x\,;y)$ du plan appartient à l'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=x^2$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x+6$ si et seulement si

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+6 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x+6=x^2 \\ y=x+6 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x^2-x-6=0 \\ y=x+6 \end{cases} .$$

Le discriminant de l'équation du second degré $x^2-x-6=0$ est

$$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-6)=25 .$$

Par suite, l'équation $x^2-x-6=0$ admet deux solutions

$$\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$\frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{6}{2}=3 .$$

En conclusion, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=x^2$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x+6$ ont deux points A et B d'intersection avec

$x_{\mathrm{A}}=-2$ et $y_{\mathrm{A}}=x_{\mathrm{A}}+6=4$

$x_{\mathrm{B}}=3$ et $y_{\mathrm{B}}=x_{\mathrm{B}}+6=9$.

q2a) L'aire du triangle ABM est égale à l'aire du trapèze ABPH moins les aires des trapèzes AMQH et BPQM .

$$\text{aire}_{\text{ABM}}=\text{aire}_{\text{ABPH}}-\text{aire}_{\text{AMQH}}-\text{aire}_{\text{BPQM}}\ .$$

Or

$$\text{aire}_{\text{ABPH}}=\frac{1}{2}\times(\text{AH}+\text{BP})\times\text{HP}$$

$$=\frac{1}{2}\times(4+9)\times5$$

$$=\frac{65}{2}\ .$$

$$\text{aire}_{\text{AMQH}}=\frac{1}{2}\times(\text{AH}+\text{QM})\times\text{HQ}$$

$$=\frac{1}{2}\times(4+x^2)\times(x-(-2))$$

$$=\frac{1}{2}\times(x^2+4)\times(x+2)$$

$$=\frac{x^3+2x^2+4x+8}{2}\ .$$

$$\text{aire}_{\text{BPQM}}=\frac{1}{2}\times(\text{PB}+\text{QM})\times\text{PQ}$$

$$=\frac{1}{2}\times(9+x^2)\times(3-x)$$

$$=\frac{-x^3+3x^2-9x+27}{2}\ .$$

Par suite

$$\mathrm{aire}_{\mathrm{ABM}} = \mathrm{aire}_{\mathrm{ABPH}} - \mathrm{aire}_{\mathrm{AMQH}} - \mathrm{aire}_{\mathrm{BPQM}}$$

$$= \frac{65}{2} - \frac{x^3+2x^2+4x+8}{2} - \frac{-x^3+3x^2-9x+27}{2}$$

$$= \frac{65-x^3-2x^2-4x-8+x^3-3x^2+9x-27}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times (-5x^2+5x+30)$$

$$= \frac{5}{2} \times (-x^2+x+6)\,.$$

Q2b) Etudions les variations de la fonction

$$f(x)=\frac{5}{2}\times(-x^2+x+6)$$

sur l'intervalle $[-2;3]$.

La fonction dérivée est

$$f'(x)=\frac{5}{2}(-x^2+x+6)'$$

$$=\frac{5}{2}(-2x+1).$$

L'inéquation $f'(x)\geqslant 0$ équivaut à

$$-2x+1\geqslant 0$$

$$-2x\geqslant -1$$

$$x\leqslant\frac{-1}{-2} \quad x\leqslant\frac{1}{2}.$$

Le tableau des variations de la fonction $f(x)=\text{aire}_{\text{ABM}}$ est

x	-2		$0{,}5$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$16{,}625$	$\searrow$	0

En conclusion, l'aire $f(x)=\text{aire}_{\text{ABM}}$ est maximale au point M d'abscisse $x=0{,}5$.